Adı Soyadı: 03.07.2023

Numarası:

2022-2023 BAHAR DÖNEMİ SOYUT MATEMATİK II
BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) a) Kesimler kümesinin çarpma işlemine göre birim elemanını bulunuz.

   b) $\beta = \{a \in Q : a^2 \geq 361\}$ kümesi bir kesim olur mu? Araştırınız.

2) a) İki negatif tam sayının çarpımlarının pozitif olduğunu gösteriniz.

   b) Rasyonel sayılarda toplama işleminin birleşmeli olduğunu gösteriniz ve $[(-2,5)]$ sayısının dört katını rasyonel sayılarda toplama işleminin tanımını kullanarak bulunuz.

3) a) $\{2, 4, 22, 92, 274, 652, \dots\}$ kümesinin sayılabilir olup olmadığını sayılabilirlik tanımını kullanarak gösteriniz.

   b) $(1,\infty)$ ile $(-1, 0)$ kümelerinin eş güçlü olduğunu gösteriniz.

BAŞARILAR

Dr. Çağla ÇELEMOĞLU

Soyut Mat II Bütünleme Cevap Anahtarı

1) a) Kesimler kümesini düşündüğümüzde her α kesimi için $\alpha \cdot 1^* = 1^* \cdot \alpha = \alpha$ old. gösterelim.

$\forall x \in \alpha \cdot 1^*$ için $x = pq$ öz $p \in \alpha, q \in 1^*$ $(q < 1)$

$\Rightarrow pq < p \Rightarrow x < p \Rightarrow x \in \alpha$ olup

--(1)-- $\alpha \cdot 1^* \subseteq \alpha$ olur. Ayrıca

$x \in \alpha$ keyfi alalım. $s \in \mathbb{Q}$ için $s > x, s \in \alpha$

seçilirse

$q = \frac{x}{s} < 1 \Rightarrow q \in 1^* \Rightarrow x = sq \in \alpha \cdot 1^*$ olup

--(2)-- $\alpha \subseteq \alpha \cdot 1^*$ bulunur. Buradan $\alpha 1^* = \alpha$ elde edilir. Kesimler çarpmaya göre değişmeli old.

$\alpha \cdot 1^* = 1^* \cdot \alpha = \alpha$ olup bu kümenin birim elemanı

1^* kümesidir.

b) $\beta = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \geq 361\}$ kümesi kesim olur mu?

K1) $\beta \neq \emptyset$: $19 \in \beta$

$\beta \neq \mathbb{Q}$: $18 \notin \beta$ ve $18 \in \mathbb{Q}$ olup $\beta \neq \mathbb{Q}$

K1 sağlanır

K2) $\forall a \in \beta$ için $x < a \Rightarrow x \in \beta$ old. göstermeliyiz. Fakat $19 \in \beta$ elemanına göre $18 \notin \beta$ old. β kesim değildir. K2 sağlanmaz

2) a) iki negatif tam sayı alalım

$[m,n], [u,v] \in \mathbb{Z}^-$ olsun. O halde $m < n$ ve $u < v$ olur.

$m<n \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ için $n=m+k_1 \Rightarrow [m,n]=[m,m+k_1] = [0,k_1]$

$u<v \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^*$ için $v=u+k_2$ olup.

$[u,v]=[u,u+k_2]=[0,k_2]$

$[m,n] \odot [u,v] = [0,k_1] \odot [0,k_2] = [\underbrace{k_1.k_2}_{\in \mathbb{N}^*}, 0] \in \mathbb{Z}^+$

2 b) $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in \mathbb{Q}$ için

$([(a,b)] \oplus [(c,d)]) \oplus [(e,f)] = [(ad+bc, bd)] \oplus [(e,f)]$

$= [((ad+bc)f+(bd)e, (bd)f)]$

$\overset{*_1}{=} [(adf+bcf+bde, (bd)f)]$

Benzer şekilde

$[(a,b)] \oplus ([(c,d)] \oplus [(e,f)]) = [(a,b)] \oplus ([(cf+de, df)])$

$= [(adf+b(cf+de), b(df))]$

$\overset{*_2}{=} [(adf+bcf+bde, bdf)]$

$*_1$ ve $*_2$ nin eşit oldukları görülmektedir. Tanı rasyonel sayılarda $\oplus$ işlemi birleşmelidir.

$[(-2,5)]$ rasyonel sayısının 4 katını toplama işlemi tanımı ile bulalım.

$[(-2,5)] \oplus [(-2,5)] = [(-20,25)]$

$[(-20,25)] \oplus [(-20,25)] = [(-1000,625)] = [(-8,5)]$

3 a) $\{2,4,22,92,274,652,\ldots\}$ kümesini ele alalım

Bu küme $S=\{n^4+n^2+2, n \in \mathbb{N}\}$ biçiminde ifade edilebilir. O halde

$f: \mathbb{N} \to S$

$n \to f(n)=n^4+n^2+2$ fonksiyonunun

birebir ve örtenliğine bakalım.

$\forall n_1 \neq n_2$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için)

$f(n_1) = n_1^4 + n_1^2 + 2 \neq n_2^4 + n_2^2 + 2 = f(n_2)$

olur $f(n_1) \neq f(n_2)$ old. f birebirdir. Ayrıca

$\forall a \in S$ için S 'nin tanımından $f(n) = a$ o.s.

$\exists n \in \mathbb{N}$ var old f örtendir. O halde

$S \approx \mathbb{N}$ olup S sayılabilir sonsuzdur

3 b) $g : (1, \infty) \longrightarrow (-1, 0)$

$x \longrightarrow g(x) = -\frac{1}{x}$ ile

tanımlanırsa

g birebirdir: $\forall x_1, x_2 \in (1, \infty)$ için $g(x_1) = g(x_2)$ ise

$$g(x_1) = -\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{x_2} = g(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

g örtendir: $\forall a \in (-1, 0)$ için $\therefore x = -\frac{1}{a} \in (1, \infty)$

vardır $\exists$ $g(x) = g\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{-1}{\left(-\frac{1}{a}\right)} = a$ old.

g örtendir. O halde

$(1, \infty) \approx (-1, 0)$ elde edilir

Scanned with CamScanner